

Aufgabe 5: Drei-Graviton-Amplitude und Einsteinsche Gravitation

1. Der Graviton-Vertexoperator lässt sich folgendermaßen als Produkt von Photon-Vertexoperatoren schreiben:

$$V_g(k, \xi, \tau, \sigma) = V_\gamma\left(\frac{k}{2}, \epsilon_R, \tau - \sigma\right) V_\gamma\left(\frac{k}{2}, \epsilon_L, \tau + \sigma\right) \Big|_{\epsilon_R \otimes \epsilon_L \rightarrow \xi} \quad (1)$$

Verwenden Sie diese Faktorisierung, um die Drei-Graviton-Amplitude

$$A_{ggg} = \langle 0 | V_g(k_1, \xi_1) V_g(k_2, \xi_2) V_g(k_3, \xi_3) | 0 \rangle \quad (2)$$

mit

$$V_g(k, \xi) \propto \xi_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} : \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu e^{ik \cdot X} : \quad (3)$$

und $X = X_{cl}$ durch Drei-Photon-Amplituden auszudrücken.

2. Berechnen Sie die Tree-Level-Drei-Graviton-Amplitude in führender Ordnung von α' unter Verwendung des Resultats aus der Vorlesung für die Drei-Photon-Amplitude,

$$A_{\gamma\gamma\gamma}(k_1, \epsilon_1, k_2, \epsilon_2, k_3, \epsilon_3) \propto \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu \epsilon_3^\rho t_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3), \quad (4)$$

wobei der Tensor $t_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3)$ wie folgt gegeben ist:

$$t_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3) = k_{2\mu} \eta_{\nu\rho} + k_{3\nu} \eta_{\rho\mu} + k_{1\rho} \eta_{\mu\nu} + 2\alpha' k_{2\mu} k_{3\nu} k_{1\rho}. \quad (5)$$

3. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der klassischen Drei-Graviton-Amplitude, die sich (in geeigneter Eichung) aus der Einsteinschen Gravitation mit der Lagrange-Funktion $\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$ ergibt:

$$\begin{aligned} A_{ggg}^{\text{Einstein}} \propto & \xi_1^{\mu\mu'} (k_\mu k_{\mu'})_2 \xi_2 \cdot \xi_3 + \text{zyklische Permutationen} \\ & + \xi_1^{\mu\mu'} k_{2\mu} (\xi_2^{\nu\nu'} k_{3\nu'} \xi_{3\nu\mu'} + \xi_3^{\rho\rho'} k_{1\rho'} \xi_{2\rho\mu'}) \\ & + \xi_2^{\nu\nu'} k_{3\nu} (\xi_1^{\mu\mu'} k_{2\mu'} \xi_{3\mu\nu'} + \xi_3^{\rho\rho'} k_{1\rho'} \xi_{1\rho\nu'}) \\ & + \xi_3^{\rho\rho'} k_{1\rho} (\xi_1^{\mu\mu'} k_{2\mu'} \xi_{2\mu\rho'} + \xi_2^{\nu\nu'} k_{3\nu'} \xi_{1\nu\rho'}). \end{aligned} \quad (6)$$

Welche zusätzlichen Terme zur Einsteinschen Gravitation könnten die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha')$ und $\mathcal{O}(\alpha'^2)$ aus obiger Stringrechnung reproduzieren?

Aufgabe 6: Dirac-Born-Infeld-Elektrodynamik

Die Raumzeit-Wirkung des offenen String (im Minkowski-Raum mit elektromagnetischem Feld $F_{\mu\nu}$) lautet

$$S_{DBI}[A] \propto \int d^D x \sqrt{-\det(\eta + 2\pi\alpha' F)} \propto \int d^D x \sqrt{\det(1 + M)} \quad (7)$$

mit $\eta = (\eta_{\mu\nu})$ und $F = (F_{\mu\nu}) = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ sowie der $D \times D$ -Matrix $(M^\mu{}_\nu = 2\pi\alpha' \eta^{\mu\rho} F_{\rho\nu})$.

1. Begründen Sie, warum die zweite Proportionalität in Gleichung (7) gilt.
2. Entwickeln Sie S_{DBI} bis zur Ordnung F^4 unter Benutzung von $\det K = e^{\text{tr} \ln K}$ für eine Matrix K und $\ln(1 + M) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} M^n$. Begründen Sie, warum die ungeraden Potenzen von M nicht beitragen.
3. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung durch Variation von S_{DBI} nach $A^\mu(x)$. Zur Vereinfachung verwenden Sie

$$\frac{\delta(M^2)_{\rho\lambda}(y)}{\delta A^\mu(x)} \propto \delta^{(D)}(x - y) (\partial_\rho F_{\mu\lambda} + \partial_\lambda F_{\mu\rho})(x) + \text{irrelevante Terme} \quad (8)$$

in

$$\frac{\delta S_{DBI}}{\delta A^\mu(x)} = \int d^D y \frac{\delta(M^2)_{\rho\lambda}(y)}{\delta A^\mu(x)} \cdot \frac{\delta S_{DBI}}{\delta(M^2)_{\rho\lambda}(y)}, \quad (9)$$

nachdem Sie S_{DBI} durch M^2 ausgedrückt haben.